$$= \frac{-e^{3x} - 2e^{2x} + e^{x} + e^{3x} + e^{2x} - 1 - e^{x}}{1 + e^{2x}} = \frac{-e^{x} - 1}{1 + e^{2x}} = -1$$

3°/ a) Soit $K(x) = \int_0^{e^x} \frac{dt}{1+t^2}$ et $g(x) = Log\left[\frac{\sqrt{2}e^{x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right]$

donc $h(x) = F(x) - K(x) - g(x)$

* F est dérivable sur **R** car f est continue sur **R** et $\forall x \in \mathbf{R}$;

$$F'(x) = f(x) = \frac{1 + e^{x}}{1 + e^{2x}}$$

* g est dérivable sur **R** ; et $\forall x \in \mathbf{R}$; $g'(x) = \left(\frac{\sqrt{2}e^{x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right)' \cdot \frac{\sqrt{1+e^{2x}}}{\sqrt{2}e^{x}}$

$$= \frac{\sqrt{2}e^{x}}{(1+e^{2x})\sqrt{1+e^{2x}}} \cdot \frac{\sqrt{1+e^{2x}}}{\sqrt{2}e^{x}} = \frac{1}{1+e^{2x}}$$

* $K(x) = L(e^{x})$ où $L(x) = \int_1^{x} \frac{dt}{1+t^2}$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur **R** donc L est dérivable sur **R**

et $L'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et la fonction $x \mapsto e^{x}$ est dérivable sur **R** donc K est dérivable sur **R** comme composée de deux fonctions dérivables et $\forall x \in \mathbf{R}$; $K'(x) = e^{x} L'(e^{x}) = \frac{e^{x}}{1+e^{2x}}$ ce qui donne que h est dérivable sur **R**

et $\forall x \in \mathbf{R}$; $h'(x) = F'(x) - K'(x) - g'(x) = \frac{1+e^{x}}{1+e^{2x}} - \frac{e^{x}}{1+e^{2x}} - \frac{1}{1+e^{2x}} = 0$

donc h est une fonction constante.

Or on a $h(0) = F(0) - K(0) - g(0) = 0$ d'où $\forall x \in \mathbf{R}$; $h(x) = 0$

et par suite $\forall x \in \mathbf{R}$ on a :

$$F(x) = \int_1^{e^x} \frac{dt}{1+t^2} + Log\left(\frac{\sqrt{2}e^{x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right)$$

b) Soit $v(x) = \int_0^{x} \frac{dt}{1+t^2}$